

الأساس في الرياضيات أدبي

الوحدة الأولى:
الاقترانات الأسية
واللوغاريتمية

الأستاذ
بلال أبو دريع

00962 785 351 625



@بلال أبو دريع

الدّرس الأول: الاقتران الأسّي

الاقتران الأسّي (exponential function)

هو اقتران صورته العامّة: $f(x) = a b^x$ حيث: a, b عدنان حقيقيان $a \neq 0$; $b \neq 1$; $b > 0$ لا تسحب على
هذا الحكي ☺

أمثلة على الاقترانات الأسّيّة:

1) $f(x) = 5(2)^x$; $a = 5$; $b = 2$

2) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $a = 3$; $b = \frac{1}{2}$

3) $f(x) = (0.3)^x$; $a = 1$; $b = 0.3$

ملاحظات على الصّورة العامّة للاقتران:

(1) ليش لازم تكون $b > 0$ ؟لأنه لو كانت $b > 0$ راح يكون الاقتران غير معرف عند بعض القيم، مثل:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$$

(2) ليش لازم $b \neq 1$ ؟لأنه لو كانت $b = 1$ بصير عنا اقتران ثابت صورته $f(x) = a$ لأن واحد (1)لو كانت b سالبة بصير عنا
جذر تربيعي سالب وهذا
حرام! ☹☹اقترانات القوّة مثل: $f(x) = x^3$ أو $f(x) = x^2$ مش اقترانات أسّيّة، ليش؟؟
أنه المتغير موجود في الأساس مش في الأس.

دير بالك

سؤال: ميز الاقتران الأسّي من غيره فيما يلي:

$$f(x) = 2(4)^x \quad (1)$$

اقتران غير أسّي لأن $b = 1$

$$f(x) = 2(x)^3 \quad (3)$$

اقتران غير أسّي لأن المتغير x مش بالأس

$$f(x) = 4(-2)^x \quad (5)$$

اقتران غير أسّي لأن b سالبة

$$f(x) = \frac{7}{(3)^{-x}} \quad (7)$$

يمكن كتابة الاقتران ليصبح $f(x) = 7(3)^x$ ؛

إذاً هو اقتران أسّي

$$f(x) = 3^x \quad (2)$$

اقتران أسّي $a = 1; b = 3$

$$f(x) = 3(1)^x \quad (4)$$

اقتران غير أسّي لأن $b = 1$

$$f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (5)$$

اقتران أسّي لأن $a = -2$ $b = \frac{1}{2}$

التعويض داخل الإقتران الأسّي

مثال: جد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

$$1) f(x) = 2(3)^x ; x = 3$$

$$f(3) = 2(3)^3 \quad \text{نعوض } x = 3$$

$$f(3) = 2 * 27$$

$$3^3 = 27$$

$$f(3) = 54$$

$$2) f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 ; x = -2$$

$$f(-2) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 4 \quad \text{نعوض } x = -2$$

$$f(-2) = (3 * 4) - 4$$

$$f(-2) = 12 - 4$$

تذكّر:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

$$3) f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 ; x = -1$$

$$f(-1) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 1 \quad \text{نعوض } x = -1$$

$$f(-1) = 2 * 3 - 1$$

$$f(-1) = 6 - 1 = 5$$

تحقق من فهمك

تمرين: جد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

$$1) f(x) = 5(3)^x ; x = 4$$

الجواب: 405

$$2) f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x ; x = -2$$

الجواب: 48

$$3) f(x) = 2(9)^x - 2 ; x = \frac{1}{2}$$

الجواب: 4

$$4) f(x) = 4(4)^x ; x = \frac{3}{2}$$

الجواب: 32

$$5) f(x) = -(2)^x + 4 ; x = 6$$

الجواب: -60

التمثيل البياني للاقتران الأسّي وخصائصه:

مثال 1: إذا كان $f(x) = 2^x$ فأجب عن الأسئلة التالية:

(1) مثل الاقتران $f(x)$ بيانياً:

الحل
الخطوة 1: أنشئ جدول القيم

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|------------|---------------------|---------------------|-------|-------|-------|
| $Y = f(x)$ | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 |
| (x, y) | $(-2, \frac{1}{4})$ | $(-1, \frac{1}{2})$ | (0,1) | (1,2) | (2,4) |

ملاحظات:

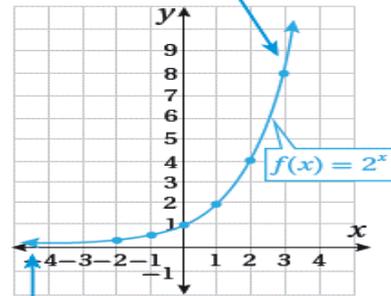
قيم x من عيّناً دائماً يكون نفس الجدول

قيم y هي ناتج تعويض قيم x

الخطوة 2: مثل الاقتران على المستوى البياني.

عيّن النقاط وصل بينهم بمنحنى متصل

يمتدُّ هذا الجزء من المنحنى
من دون نهاية.



يقترّب هذا الجزء من المنحنى
من المحور x .

(2) جد مجال الاقتران $f(x)$ ؟

المجال: هو مجموعة القيم التي توجد على المحور x ويكون الاقتران معرّفاً عندها.

من الشكل، مجال الاقتران إذا تلاحظ هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

(3) ما مدى الاقتران $f(x)$ ؟

المدى: هو مجموعة القيم التي توجد على المحور y وتكون صور x التي ضمن مجال الاقتران.

من الشكل، مدى الاقتران $(0, \infty)$.

(4) جد خطوط التقارب؟

خط التقارب: هو خط مستقيم يقترب منه منحنى الاقتران.

الاقتران له خط تقارب أفقي هو المحور x .

(5) جد المقطعين من المحورين الإحداثيين؟

المقطعين من الإحداثيين: النقطة التي يقطع عندها المنحنى محور x ومحور y .

من المحور x : لا يوجد مقطع لأن $y > 0$ دائماً.

من المحور y : عند $x = 0$ يساوي 1.

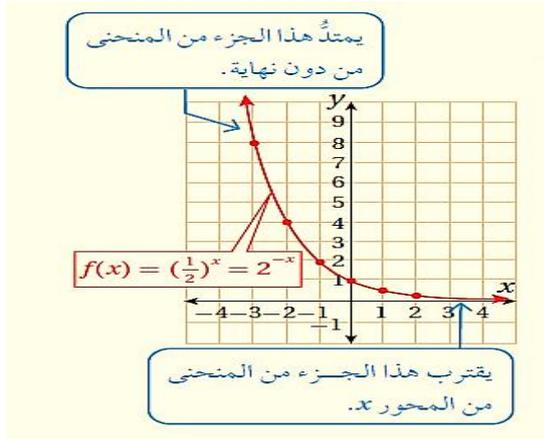
(6) هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

الاقتران $f(x)$ متناقص لأنه كلما زادت قيم x تتناقص قيم y

(7) هل الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد؟

نعم، اقتران واحد لواحد باستخدام اختبار الخط الأفقي؛ إذ لا يوجد خط أفقي يمكنه قطع منحنى الاقتران في أكثر من نقطة

رَكِّزْ مَعِيَ أَفْهَمَكَ شِغْلَةَ



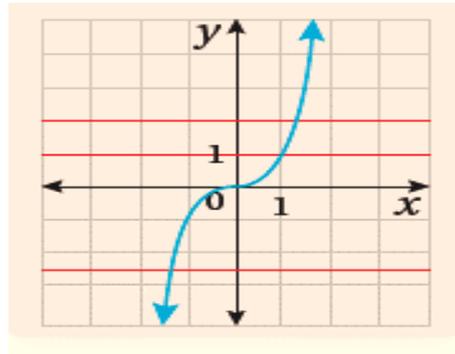
ما هو اقتران واحد لواحد؟

هو اقتران يرتبط كل عنصر في مداه بعنصر واحد فقط في مجاله.

كيف أعرف انه الاقتران واحد لواحد؟ ☹️

عن طريق اختبار اسمه (اختبار الخط الأفقي) بكون ما فيه

خط أفقي ممكن انه يقطع الاقتران بأكثر من نقطة. ☺️



(2) جد مجال الاقتران $f(x)$ ؟

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

(3) جد مدى الاقتران $f(x)$ ؟

المدى هو الفترة $(0, \infty)$

(4) جد خطوط التقارب للاقتران $f(x)$

له خط تقارب أفقي هو المحور x .

(5) جد المقطعين من المحورين الاحداثيين؟

مع المحور x : لا يوجد مقطع.

مع المحور y : المقطع هو 1 عند $x = 0$

(6) هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟

الاقتران متناقص لأنه كلما زادت قيم x تناقصت قيم y .

(7) هل الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد

لواحد؟

نعم، اقتران واحد لواحد، باستخدام اختبار الخط الأفقي.

مثال 2: إذا كان $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ أجب عن

الأسئلة الآتية:

(1) مثل الاقتران $f(x)$ بيانياً.

الحل
الخطوة 1: أنشئ جدول القيم

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|------------|---------|---------|--------|--------------------|--------------------|
| $Y = f(x)$ | 4 | 2 | 1 | 1/2 | 1/4 |
| (x, y) | (-2, 4) | (-1, 2) | (0, 1) | $(1, \frac{1}{2})$ | $(2, \frac{1}{4})$ |

الخطوة 2: مثل الاقتران على المستوى البياني، ووصل بينهم.

تحقق من فهمك **تمرين:**

- 1) إذا كان $f(x) = 3^x$ فأجب عما يلي:
 a. مثل الاقتران بيانياً ثم حدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.
 b. جد المقطعين من المحورين الاحداثيين.
 c. هل الاقتران متزايد أم متناقص؟
 d. هل الاقتران واحد لواحد؟

خصائص الاقتران الأسّي

ملخص

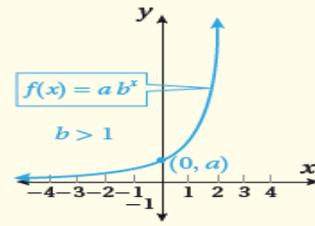
تتمثل خصائص الاقتران الأسّي، الذي يكون على صورة $f(x) = a b^x$

حيث أن: $a > 0; b \neq 1; b > 0$ فيما يلي:

مجال الاقتران: هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R} .

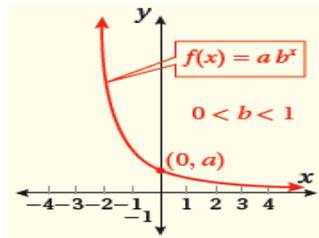
مدى الاقتران: هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة \mathcal{R}^+ أي لفترة $(0, \infty)$.

يكون **الاقتران متزايد** إذا كانت $b > 1$ كما



في الشكل المجاور.

يكون **الاقتران متناقص** إذا كانت



$0 < b < 1$ كما في الشكل المجاور:

الإجابة:

مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية،

مدى الاقتران $(0, \infty)$ ،

الاقتران له خط تقارب أفقي هو المحور x .

من المحور x : لا يوجد مقطع.

المحور y : عند $x = 0$ هو 1.

الاقتران $f(x)$ متناقص لأنه كلما زادت قيم x تتناقص قيم y .

نعم، اقتران واحد لواحد باستخدام اختبار الخط الأفقي

ملاحظة

إذا كانت a سالبة فإن الاقتران ينعكس حول المحور x :

← يكون المدى $(-\infty, 0)$

← يصير الاقتران المتزايد متناقص، والاقتران المتناقص متزايد؛ يعني:

إذا كانت $b > 1$ يكون الاقتران متناقص.

وإذا كانت $0 < b < 1$ يكون الاقتران متزايد

3) إذا كان الاقتران $f(x) = (-2)^x$ أجب عما يلي:
عما يلي:

a. مثل الاقتران بيانياً ثم حدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b. جد المقطعين من المحورين الاحداثيين.

c. هل الاقتران متزايد أم متناقص؟

d. هل الاقتران واحد لواحد؟

2) إذا كان $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ أجب عما يلي:

a. مثل الاقتران بيانياً ثم حدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b. جد المقطعين من المحورين الاحداثيين.

c. هل الاقتران متزايد أم متناقص؟

d. هل الاقتران واحد لواحد؟

ما تنسى:

إذا كانت a سالبة فإن الاقتران ينعكس حول المحور x :

← يكون المدى $(-\infty, 0)$

← يصير الاقتران المتزايد متناقص، والاقتران المتناقص متزايد؛ يعني:

إذا كانت $b > 1$ يكون الاقتران متناقص.

وإذا كانت $0 < b < 1$ يكون الاقتران متزايد

هسه حل السؤال 😊

الإجابة:

المجال: \mathcal{R} المدى: $(0, \infty)$

له خط تقارب أفقي هو المحور x .

مع المحور x : لا يوجد مقطع

مع المحور y : المقطع هو 1 عند $x = 0$.

الاقتران متناقص لأنه كلما زادت قيم x تناقصت قيم y .

نعم اقتران واحد لواحد، باستخدام اختبار الخط الأفقي.

الإجابة:

المجال: \mathcal{R} المدى: $(0, -1)$

له خط تقارب أفقي هو المحور x

يقطع المحور y في النقطة $(0, -1)$

الاقتران متناقص، وهو اقتران واحد لواحد.

مثال: جد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يلي وحدّد مجاله ومداه، وبيّن إذا كان متناقصاً أم متزايداً:

$$1) f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$$

الحل

$$a = 5; b = 3; h = -1; k = -2$$

← خط التقارب الأفقي للاقتران هو:

$$y = -2$$

← مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R}

← مدى الاقتران هو: $(-2, \infty)$

← الاقتران متزايد لأن $b = 3 > 1$

$$2) f(x) = 7(2)^{-x} + 3$$

الحل

$$f(x) = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$$

$$a = 7; b = \frac{1}{2}; h = -0; k = 3$$

← خط التقارب الأفقي للاقتران هو:

$$y = 3$$

← مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R}

← مدى الاقتران هو: $(3, \infty)$

← الاقتران متناقص لأن $b = \frac{1}{2} < 1$

خصائص الاقتران الأسّي في صورة:

$$f(x) = a b^{x-h} + k$$

إذا كان $f(x) = a b^{x-h} + k$ حيث $a; b; h; k$ أعداد حقيقية وكان

$$b \neq 1; b > 0; a > 0$$

فإن:

(1) مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R} .

(2) مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k, ∞) .

(3) الاقتران $f(x)$ متزايد إذا كانت:

$$b > 1$$

(4) الاقتران $f(x)$ متناقص إذا كانت:

$$0 < b < 1$$

(5) للاقتران $f(x)$ خط تقارب أفقي وهو المستقيم $y = k$.

ملاحظة هامة:

إذا كانت a سالبة فإن الاقتران ينعكس حول المحور x :

← يكون المدى للاقتران $(-\infty, k)$.

← يصبح الاقتران المتزايد متناقص، والاقتران المتناقص متزايد.

$$3) f(x) = -3(4)^x + 1$$

الحل

$$a = -3; b = 4; h = -0 \quad k = 1$$

← خط التقارب الأفقي للاقتران هو: $y = 1$

← مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R}

← مدى الاقتران هو: $(-\infty, 1)$

← الاقتران متناقص لأن $b = 4 > 1$ و a سالبة

تحقق من فهمك **تمرين:**

4) $f(x) = -2 \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

خط التّقارب الأفقي $y = 1$
 المجال \mathcal{R} المدى $(-\infty, 1)$
 متزايد $1 < b = 1/3 < a$ سالبة

5) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 2$

خط التّقارب الأفقي $y = 2$
 المجال \mathcal{R} المدى $(-\infty, 2)$
 متناقص $1 > b = 2 > a$ سالبة

نكشة مخ ☺

جد المقطعين من المحورين الاحداثيين

للاقتران: $f(x) = 2(3)^{x-1}$

المقطع x : لا يوجد، المقطع y : $\frac{2}{3}$

جد خط التّقارب الافقي لكل اقتران مما يلي
 وحدد مجاله ومداه، وبين إذا كان متناقصاً
 ام متزايداً:

1) $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$

خط التّقارب الأفقي $y = -1$
 المجال \mathcal{R} المدى $(-1, \infty)$
 متزايد $1 > b = 3 > a$ موجبة

2) $f(x) = 4(5)^{-x}$

خط التّقارب الأفقي $y = 0$
 المجال \mathcal{R} المدى $(0, \infty)$
 متناقص $1 < b = 1/5 < a$ موجبة

3) $f(x) = \frac{-1}{4}(3)^{x-1} + 2$

خط التّقارب الأفقي $y = 2$
 المجال \mathcal{R} المدى $(-\infty, 2)$
 متناقص $1 > b = 3 > a$ سالبة

تطبيقات حياتية على الاقترانات الأسية:

مثال 1: يمثل الاقتران $f(x) = 500(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية حيث x الزمن بالساعات:

a. جد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات.

b. بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 4000 خلية؟

c. جد عدد الخلايا البكتيرية عند البداية؟

الحل

نعوض $x = 5$: $f(x) = 500(2)^x$ a.)

$$f(5) = 500 \cdot 2^5$$

$$f(5) = 500 \cdot 32 = 16000 \text{ خلية}$$

b.) $f(x) = 500(2)^x$ نعوض $f(x) = 4000$

$$4000 = 500 \cdot 2^x$$

$$40 = 5 \cdot 2^x$$

$$8 = 2^x$$

$$2^3 = 2^x$$

$$x = 3 \text{ ساعات}$$

عدد الساعات التي يصبح عندها عدد

الخلايا البكتيرية 4000 هو 3 ساعات.

c.)

نعوض مكان $x = 0$

$$f(0) = 500 \cdot 2^0$$

$$f(0) = 500 \cdot 1 = 500 \text{ خلية}$$

مثال 2: يمثل الاقتران التالي:

$f(x) = 30(2)^x$ عدد حشرات خنفساء الدقيق في كيس دقيق، حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس.

a. جد عدد الحشرات في الكيس بعد 6 أسابيع

b. بعد كم أسبوع يصبح عدد الحشرات في الكيس 7680 حشرة؟

c. جد عدد الحشرات عند بداية رصد وجودها؟

الحل

نعوض $x = 6$: $f(x) = 30 \cdot 2^6$ A.)

$$f(6) = 30 \cdot 64 = 1920 \text{ حشرة}$$

b.) $f(x) = 7680$ نعوض مكان

$$7680 = 30 \cdot 2^x \quad \text{أقسم الطرفين على 10}$$

$$768 = 3 \cdot 2^x \quad \text{أقسم الطرفين على 3}$$

$$256 = 2^x \quad \text{حل المعادلة الأسية}$$

$$2^8 = 2^x$$

$$2^8 = 2^x \rightarrow x = 8$$

c.) $x = 0$ نعوض مكان

$$f(0) = 30 \cdot 2^0$$

$$f(0) = 30 \cdot 1 = 30$$

تمرين:

تحقق من فهمك

(2) يمثّل الاقتران $f(x) = 2(0.75)^x$ كمية الماء المتبقية في خزان (بالمتر المكعب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه:
 a. جد كمية الماء المتبقية في الخزان بعد ساعة واحدة؟

b. ما الزمن الذي تصبح فيه كمية الماء المتبقية في الخزان $\frac{9}{4} m^3$ تقريباً؟

(1) يمثّل الاقتران $f(x) = 400(2)^{\frac{x}{2}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

a. جد عدد الخلايا البكتيرية عند بدء التجربة؟

b. جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

c. بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية؟

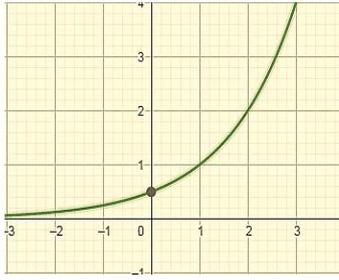
الإجابة:

a. 1.5 b. 2

الإجابة:

a. 400, b. 6400, c. 24

مثال 2: بيّن الشكل المجاور التمثيل البياني



لمنحنى الاقتران
جد $f(x) = a b^x$
؟ $f(4)$

الحل

أولاً: نجد قاعدة الاقتران

نأخذ النقطتين $(0, \frac{1}{2})$ و $(1, 1)$ ونعوّضهما في الاقتران

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(0) = a b^0 = \frac{1}{2}$$

$$a * 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

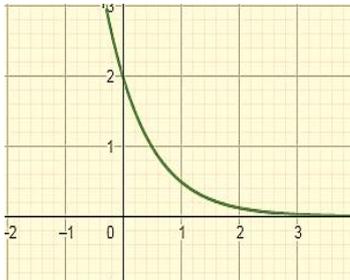
$$(1, 1) \Rightarrow f(1) = a b^1 = 1$$

$$\frac{1}{2} b = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (2)^x \quad \text{إذاً قاعدة الاقتران}$$

$$f(4) = \frac{1}{2} (2)^4 = \frac{1}{2} * 16 = 8$$

تمرين: بيّن الشكل المجاور التمثيل البياني



لمنحنى الاقتران
جد $f(x) = a b^x$

(1) قاعدة الاقتران

$f(x)(2)$

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad \text{الجواب}$$

إيجاد قاعدة الاقتران الأسى من شكل مرسوم

مثال 1: بيّن الشكل المجاور التمثيل البياني

لمنحنى الاقتران $f(x) = a b^x$ جد:



(1) قاعدة الاقتران

$f(x)$

$f(2) (2)$

الحل

1. نأخذ نقطتين عبر فيهم الاقتران مثل:

$$(-1, 2)(0, 1)$$

2. ثم نعوّض النقطتين في قاعدة الاقتران لتكوين معادلتين.

$$(0, 1) \Rightarrow f(0) = a b^0$$

$$1 = a * 1 \Rightarrow a = 1$$

تعني: عوّض مكان كل من:

$$y = 1, x = 0$$

$$(-1, 2) \Rightarrow f(-1) = a b^{-1}$$

$$2 = 1 * \frac{1}{b}$$

نعوّض قيمة b ;

التي أوجدناها في قاعدة

$$b = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

إذاً قاعدة الاقتران

$$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

إيجاد $f(2)$ نعوّض $x = 2$

في قاعدة الاقتران:

أسئلة الكتاب:

13) $f(x) = 3 \left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$

14) $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

يمثل الاقتران $f(x) = 7000(1.2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

15) جد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة؟

16) جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

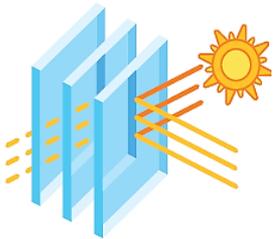
17) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟

يمثل الاقتران $f(x) = 100 (0.97)^x$ نسبة الضوء المار خلال

عدد x من الألواح

الزجاجية المتوازية:

الزجاجية المتوازية:



18) جد نسبة الضوء المار خلال لوح

زجاجي واحد؟

19) جد نسبة الضوء المار خلال 3 ألواح؟

جد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = 11^x ; x = 3$

2) $f(x) = -5(2)^x ; x = 1$

3) $f(x) = 3 \left(\frac{1}{7}\right)^x ; x = 2$

4) $f(x) = -(5)^x + 4 ; x = 4$

5) $f(x) = 3^x + 1 ; x = 5$

6) $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3 ; x = 2$

ممثل كل اقتران مما يأتي بيانياً، ثم جد مجاله ومداه:

7) $f(x) = 4^x$

8) $f(x) = 9^{-x}$

9) $f(x) = 7 \left(\frac{1}{7}\right)^x$

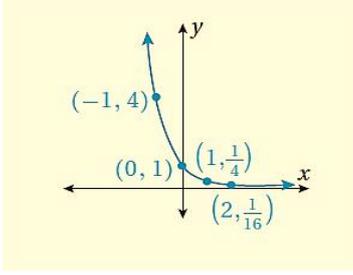
10) $f(x) = 3(6)^x$

جد خطوط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي، ثم حدد مجاله ومداه:

11) $f(x) = 5^{x-1} + 2$

12) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$

أسئلة القوة:



(22) بيّن الشكل

المجاور التمثيل

البياني لمنحنى

الاقتران $f(x) =$ $a b^x$ ج: $\frac{1}{16}$ جد $f(3)$ مبرراً إجابتك.

(23) اكتشف المختلف في الاقترانات التالية:

$$y = 3^x ; f(x) = 2(4)^x$$

$$y = 5(3)^x ; f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

(24) إذا كان الاقتران $f(x) = a b^x$

اقتراناً أسياً فأثبت أن:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$$

الحل

نعوض مكان x بـ $x+1$

$$f(x+1) = a b^{x+1}$$

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{a b^{x+1}}{a b^x}$$

في القسمة نطرح الأسس

$$b^{x+1-x} = b^1 = b$$

يمثل الاقتران $p(x) = 100(0.3)^t$

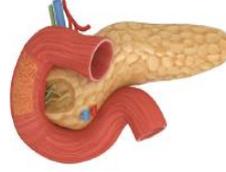
نسبة المتعافين من مرض سرطان

البنكرياس، ممن هم في المرحلة المتقدمة

حيث تعافوا بعد t سنة

من التشخيص الأولي

للمرض:



(20) جد نسبة المتعافين بعد سنة من

التشخيص الأولي للمرض؟

(21) بعد كم سنة تصبح نسبة المتعافين

9%؟

سؤال عاطاير

يمثل الاقتران التالي:

$$p(t) = 325(0.25)^t$$

دم مريض بعد t

ساعة من تناوله.



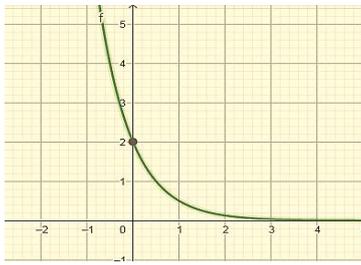
جد تركيز الدواء بعد 5 ساعات من تناوله؟

4) يمثل الاقتران $f(x) = 800 (2)^{\frac{x}{2}-1}$

عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في
تجربة مخبرية. بعد كم ساعة يصبح عدد
الخلايا البكتيرية 204800؟

ج: 18

5) بيّن الشكل المجاور التمثيل البياني



لمنحنى الاقتران

$$f(x) = ab^x$$

جد $f(-3)$ ؟

ج: 128

أسئلة العلامة الكاملة:

1) جد قيمة كل اقتران مما يلي عند قيمة x
المعطاة:

$$1) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 12 ; x = 3$$

ج: $\frac{780}{64}$

$$2) f(x) = \left(\frac{1}{64}\right)^x ; x = \frac{-2}{3}$$

ج: 16

2) مثل بيانياً كل اقتران مما يأتي وحدد
مجاله ومداه:

$$1) f(x) = 7^{-x}$$

$$2) f(x) = 2(9)^x$$

$$3) f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

3) جد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما

يأتي، ثم حدد مجاله ومداه وبيّن إذا كان
متناقصاً أم متزايداً، ثم جد المقطع الصّادي:

$$1) f(x) = 2^{x-1} + 3$$

$$2) f(x) = -2(3)^x - 1$$

$$3) f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 4$$

$$4) f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3$$

مثال 2: في دراسة شملت إحدى مزارع الأغنام تبين أن عدد الخراف في المزرعة يزداد بنسبة تبلغ 31% سنوياً:



a. اكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد الخراف بعد t سنة علماً أن عددها عند بدء الدراسة هو 1524 خروفاً؟

b. جد عدد الخراف بعد 5 سنوات من بدء الدراسة؟

الحل

$$a. a = 1524 ; r = 0.13$$

$$A(t) = a (1 + r)^t$$

$$A(t) = 1524 (1 + 0.13)^t$$

$$A(t) = 1524 (1.13)^t$$

b. نعوض $t = 5$

$$A(5) = 1524 (1.13)^5 = 5880$$

اقتران النمو الأسّي:

تزداد بعض الكميات بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، ويمكن إيجاد مقدار كل من هذه الكميات التي ازدادت بعد t فترة من الزمن باستعمال اقتران يسمى " اقتران النمو الأسّي ".

القانون

اقتران النمو الأسّي:

$$A(t) = a (1 + r)^t$$

t : الفترة الزمنية للنمو.

a : الكمية الابتدائية.

r : النسبة المئوية للنمو.

$1 + r$: عامل النمو.

حفظ

مثال 1: في دراسة مثلت إحدى مزارع الأبقار، تبين أن عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة تبلغ نحو 18% سنوياً:

a. اكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد الأبقار بعد t سنة، علماً بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 327 بقرة؟

b. جد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة؟

الحل

a. اقتران النمو الأسّي

بالتعويض

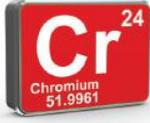
بالتبسيط

b. نعوض $t = 3$ في الاقتران

$$A(3) = 537 \text{ بقرة}$$

مثال 2: تتناقص 5g من عنصر الكروم بما

نسبته 2.45% يوميًا نتيجة تفاعله مع الهواء:



a. اكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل كمية الكروم (بالغرام g) بعد t يومًا.

b. جد كمية الكروم (بالغرام g) بعد 3 أيام

الحل

$$a) a = 5 ; r = 2.45\% = 0.0245$$

$$A(t) = a (1 - r)^t$$

$$A(t) = 5 (1 - 0.0245)^t$$

$$A(t) = 5 (0.9755)^t$$

$$b) \quad t = 3 \text{ نعوض}$$

$$A(3) = 5(0.9755)^3 = 4.6 \text{ g}$$

تمرين:

تحقق من فهمك

1) استخدم 35 ألف شخص موقعًا إلكترونيًا، ومن المتوقع أن يزداد هذا العدد بنسبة 2% كل سنة:

1. اكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

2. جد عدد مستخدمي الموقع بعد 7 سنوات.

$$ج: 1) 3500 (1.02)^t \quad 2) 40204$$

اقتران الاضمحلال الأسي:

تنقص بعض الكميات بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية كما هو الحال في النمو الأسي، ويمكن تمثيل هذا النقص باستعمال اقتران يسمى " اقتران الاضمحلال الأسي".

القانون

اقتران الاضمحلال الأسي:

$$A(t) = a (1 - r)^t$$

t : الفترة الزمنية للاضمحلال.

a : الكمية الابتدائية.

r : النسبة المئوية للاضمحلال.

$1 - r$: عامل الاضمحلال.

حفظ

مثال 1: اشترت حلا سيارة هجينة قابلة

للشحن بمبلغ 28500 JD. إذا كان ثمن

السيارة يقل

بنسبة 5%

سنويًا.



a. اكتب

اقتران

الاضمحلال الأسي لثمن السيارة.

b. جد ثمن السيارة بعد مرور 4 سنوات.

الحل

$$a) a = 28500 ; r = 0.05$$

$$A(t) = 28500 (1 - 0.05)^t$$

$$A(t) = 28500 (0.95)^t$$

$$b) A(t) = 28500 (0.95)^4$$

نعوض $t = 4$

$$A(t) = 23213$$

4) يتناقص ثمن سيارة سعرها 19725 JD بنسبة 3% سنويًا:

1. اكتب اقتران الاضمحلال الأسّي لثمن السيارة بعد t سنة.

2. جد ثمن السيارة بعد 4 سنوات.

2) في دراسة علمية تناولت درجة تأثير التلوث في عدد الأسماك التي تعيش في إحدى البحيرات، توصل العلماء إلى أن الأسماك في البحيرة تقل بنسبة 25% كل سنة:

1. اكتب اقتران الاضمحلال الأسّي الذي يمثل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علمًا بأن عددها عند بدء الدراسة هو 12000 سمكة

2. جد عدد الأسماك في البحيرة بعد 3 سنوات؟

ج: $(0.97)^t$ 1) 19725 2) 174624

تحدي ☺

اكتب اقتران يمثل عدد المصابين بالإنفلونزا المدرسية بعد t أسبوع، علمًا بأن العدد يتضاعف بمقدار 3 مرات كل أسبوع.

ج: $A(t) = (3)^t$

3) بلغ عدد سكان لواء الموقر 84370 نسمة تقريبًا سنة 2015 إذا كانت نسبة النمو السكاني في اللواء 2.4% سنويًا:

a. اكتب اقتران الاضمحلال الأسّي لثمن السيارة بعد t سنة.

b. جد العدد التقريبي لسكان اللواء سنة

2030.

ج: $(1.024)^t$ 1) 84370 2) 120417

صيغة الربح المركّب

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 9000 \left(1 + \frac{0.0146}{4}\right)^{4 \times 3}$$

باستخدام الآلة الحاسبة

$$A = 9402.21$$

مثال 2: استثمرت فرح JD 5000 في شركة بنسبة ربح تبلغ 2.25%، وتضاف كل 6 أشهر. جد جملة المبلغ بعد 5 سنوات؟

الحل

$$P = 9 = 5000$$

$$r = 2.25\% = \frac{2.25}{100} = 0.0225$$

$$n = 2 ; t = 5$$

$$A = 5000 \left(1 + \frac{0.0225}{2}\right)^{2 \times 5}$$

$$A = 55902$$

باستخدام الآلة الحاسبة

تمرين: استثمر عامر مبلغ JD 8000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مركّب تبلغ 5.5%، وتضاف النسبة كل شهر:

1. اكتب صيغة تمثّل جملة المبلغ بعد t سنة.

2. جد جملة المبلغ بعد 3 سنوات.

الإجابة: 9431

الربح المركّب:

من التطبيقات على اقتران النمو الأسّي في الحياة ما يسمى بـ "الربح المركّب":

وهو الفائدة المستحقّة على مبلغ الاستثمار الأصلي الذي يسمى رأس

الربا طبعاً
حرام ☹️

المال، والفوائد المستحقّة

سابقاً وهو الربا.

القانون

يمكن حساب جملة المبلغ المستحق في حالة الربح المركّب باستعمال القانون الآتي:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث:

A جملة المبلغ.

P : المبلغ الأصلي

r : معدّل الفائدة السنوي (يكتب بصورة عشرية).

n : عدد مرات إضافة الربح المركّب في السنة.

t : عدد السنوات

مثال 1: استثمر طالب مبلغ JD 9000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مركّب تبلغ 1.46% وتضاف كل 3 أشهر، جد جملة المبلغ بعد 3 سنوات؟

الحل

$$P = 9000$$

$$r = 1.46\% = \frac{1.46}{100} = 0.0146$$

$$n = 4 ; t = 3$$

يتلقّى مبلغ الفائدة كل 3 أشهر: مما يعني أنّه يضاف إلى المبلغ الأصلي 4 مرات في السنة $\frac{12}{3} = 4$

رَكَز

ربّما تفشل إذا خاطرت لكن من المؤكّد أنك ستفشل إن لم تخاطر

مثال 1: أودع بشّار مبلغ 4500 JD في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقداره 4% . جد جملة المبلغ بعد 10 سنوات.

الحل

$$P = 4500$$

$$r = 4\% = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$t = 10$$

$$A = P e^{rt}$$

$$A = 4500 e^{0.04 \cdot 10}$$

$$A = 6713.21$$

باستخدام الآلة الحاسبة

مثال 2: أودعت هبة مبلغ 6300 JD في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 3.2% . جد جملة المبلغ بعد 9 سنوات.

الحل

$$P = 6300$$

$$r = 3.2\% = \frac{3.2}{100} = 0.032$$

$$t = 9$$

$$A = 6300 e^{0.032 \cdot 9}$$

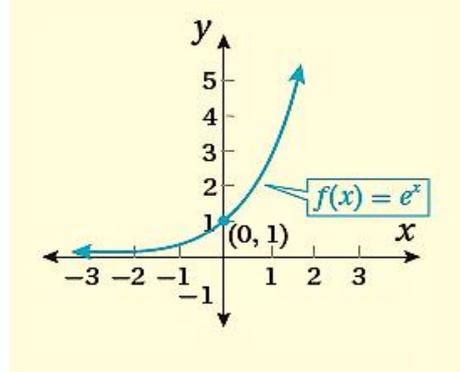
$$A = 8403$$

الاقتران الأسّي الطبيعي:

هو اقتران أساسه العدد النيبيري e وقيّمته تقريباً تساوي 2.7 ويسمى "الأساس الطبيعي".

ويسمى الاقتران $f(x) = e^x$ "الاقتران الأسّي الطبيعي" وله نفس خصائص التمثيل البياني للاقتران الأسّي $f(x) = a b^x$ حيث:

$$a > 0 ; b > 1$$



الرّبح المركّب المستمر:

من التّطبيقات على الاقتران الأسّي الطبيعي وهو عمليّة حساب جملة المبلغ بعد إضافة الرّبح المركّب إلى رأس المال عددًا لانهائيًا من المرات في السّنة.

القانون

يمكن حساب جملة المبلغ في حالة الرّبح المركّب المستمر باستخدام القانون الآتي:

$$A = P e^{rt}$$

بحيث:

A جملة المبلغ.

P : المبلغ الأصلي

r : معدّل الفائدة المستمر (يكتب بصورة عشرية).

t : عدد السّنوات

أسئلة الكتاب:

يبلغ عدد المشاركين في مؤتمر طبيّ 150 شخص لهذه السنة، ويتوقع زيادة هذا العدد بنسبة 8% كل سنة:



(1) اكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد المشاركين بعد t سنة.

(2) جد عدد المشاركين المتوقع بعد 5 سنوات.

ج: 200

استخدم 50 ألف شخص موقعًا إلكترونيًا تعليميًا سنة 2019، ثمّ ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% في كل سنة:

(3) اكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

(4) جد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025.

ج: 115653

يتناقص ثمن سيارة سعرها JD 17350 بنسبة 3.5% سنويًا:



(5) اكتب اقتران الاضمحلال الأسّي لثمن السيارة.

(6) جد ثمن السيارة بعد 3 سنوات.

ج: 15591.2

تمرين: أودع حسام مبلغ JD 60000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر 6%.

جد جملة المبلغ بعد مرور 17 سنة؟

الإجابة: 166392

كيف أميّز بين الربح المركّب والربح المستمر في السؤال؟

بسيطة ☺

في السؤال بيذكرك أن النسبة هي ربح مركّب أو ربح مركّب مستمر.

انتبه لصيغة السؤال

يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إليها:

(7) اكتب اقتران الاضمحلال الأسّي الذي يمثّل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة، علماً أنّ عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية.

(8) جد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 ساعات.

ج: 168749

(14) أودع حسام مبلغ 9000 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مركّب مستمر مقدارها 3.6%: جد جملة المبلغ بعد 7 سنوات.

ج: 11579

(15) أودعت ليلي مبلغ 8200 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مركّب مستمر مقدارها 4.9%: جد جملة المبلغ بعد 9 سنوات

ج: 12744.9

(16) أعدّ باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة وتوصّل إلى أنّه:

يمكن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران:
حيث: $p(t) = 20 e^{0.03t}$

p عدد الذباب بعد t ساعة: جد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة؟

ج: 173.4

(9) ينفق الدجاج في مزرعة دواجن بنسبة 25% يومياً نتيجة إصابته بمرض ما

جد العدد المتبقّي من الدجاج بعد 5 أيام، علماً بأنّ عدده الأولي هو 1550 دجاجة.

ج: 368

(10) استثمر ربيع مبلغ 1200 JD في شركة بنسبة ربح مركّب تبلغ 10% وتضاف كل شهر. اكتب صيغة تمثّل جملة المبلغ بعد t سنة.

(11) جد جملة المبلغ بعد 5 سنوات.

ج: 1974

استثمرت هند مبلغ 6200 JD في شركة بنسبة ربح مركّب 8.4% تضاف كل يوم:

(12) اكتب صيغة تمثّل جملة الربح بعد t من السنوات.

(13) جد جملة المبلغ بعد 6 سنوات.

ج: 10262.4

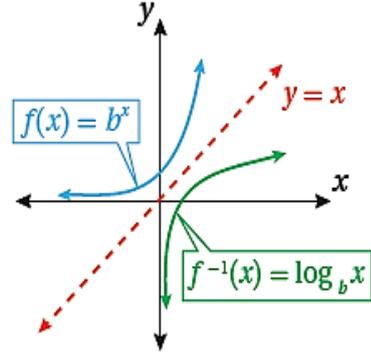
الدّرس الثالث: الاقتران اللوغاريتمي

الاقتران اللوغاريتمي:

هو الاقتران العكسي للاقتران الأسّي $f(x) = b^x$ ويرمز له بالرمز:

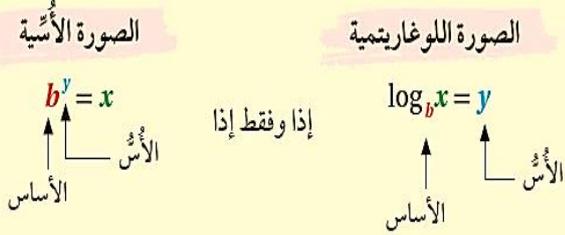
$$f^{-1}(x) = \log_b x ; b > 0 ; b \neq 1$$

نقرأه: لوغاريتم x للأساس b



العلاقة بين الصّورة الأسّيّة
واللوغاريتمية:

إذا كان $x > 0 ; b > 0 ; b \neq 1$ فإن:



التّحويل من الصّورة اللوغاريتمية إلى
الصّورة الأسّيّة:

مثال: اكتب كل معادلة لوغاريتمية فيما يلي في صورة أسّيّة:

$$1) \log_2 8 = 3$$

$$2^3 = 8$$

الحل

$$2) \log_{23} 23 = 1$$

$$23^1 = 23$$

الحل

$$3) \log_{10} \frac{1}{100} = -2$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100}$$

الحل

$$4) \log_2 1 = 0$$

$$2^0 = 1$$

الحل

افهم أكثر

كل اقتران واحد لواحد يمكن إيجاد اقتران عكسي له (رمز الاقتران العكسي هو $f^{-1}(x)$)، ولأن الاقتران الأسّي هو اقتران واحد لواحد فمعكوس الاقتران الأسّي هو الاقتران اللوغاريتمي.

$$3) 4^{-3} = \frac{1}{64}$$

$$\log_4 \frac{1}{64} = -3$$

$$4) 72^0 = 1$$

$$\log_{72} 1 = 0$$

تحقق من فهمك **تمرين:** اكتب كل معادلة أسية مما يلي في صورة لوغاريتمية:

$$1) 7^3 = 343$$

$$2) 49^{\frac{1}{2}} = 7$$

$$3) 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

$$4) 17^0 = 1$$

تمرين: اكتب كل معادلة لوغاريتمية فيما يلي بصورة أسية:

$$1) \log_2 16 = 4$$

$$2) \log\left(\frac{1}{243}\right) = -5$$

$$3) \log_7 7 = 1$$

$$4) \log_9 1 = 0$$

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية:

تمرين: اكتب كل معادلة أسية مما يلي في صورة لوغاريتمية:

$$1) 8^3 = 512$$

$$\log_8 512 = 3$$

$$2) 25^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$$

إيجاد قيمة العبارة اللوغاريتمية:

تمرين: جد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\log_5 25$

ج: 2

2) $\log_8 \sqrt{8}$

ج: 24

3) $\log_{81} 9$

ج: $\frac{1}{2}$

4) $\log_3 \frac{1}{27}$

ج: -3

5) $\log_{10} 0.0001$

ج: -4

6) $\log_{\frac{5}{3}} 1$

ج: -1

مثال: جد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\log_2 32$

الحل

افرض أن المقدار يساوي y

$$\log_2 32 = y$$

$$2^y = 32$$

$$2^y = 2^5$$

$$y = 5$$

اكتب الاقتران بالصورة الأسية

حل المعادلة الأسية

2) $\log_{13} \sqrt{13}$

$$y = \log_{13} \sqrt{13}$$

$$13^y = \sqrt{13} = 13^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

الحل

3) $\log_{36} 6$

الحل

$$y = \log_{36} 6$$

$$36^y = 6(6^2)^y \Rightarrow 6^{2y} = 6$$

$$2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

4) $\log_{10} 0.1$

الحل

$$\log_{10} 0.1 = y$$

$$10^y = 0.1 \Rightarrow 10^y = 10^{-1}$$

$$y = -1$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات:

قوانين سريعة

إذا كان $x > 0$; $b > 0$; $b \neq 1$ فإن

$$1) \log_b 1 = 0 ; b^0 = 1$$

$$2) \log_b b = 1 ; b^1 = b$$

$$3) \log_b b^x = x ; b^x = b^x$$

$$4) b^{\log_b x} = x ; x > 0$$

$$(\log_b x = \log_b x)$$

$\log_b 0$ غير معرف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة x .

مثال: جد قيمة كل مما يأتي من دون استخدام الآلة الحاسبة:

$$1) \log_3 1$$

$$\log_b 1 = 0 \rightarrow \log_3 1 = 0$$

$$2) \log_5 \sqrt{5}$$

$$\log_a b^x = x \rightarrow \log_5 \sqrt{5}$$

$$\rightarrow \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$3) \log_{12} 12$$

$$\log_{12} 12 = 1$$

$$4) 3^{\log_3 6}$$

$$b^{\log_b x} = x \rightarrow 3^{\log_3 6} = 6$$

$$7) \log_{\frac{1}{6}} 6$$

ج: -1

$$8) \log_2 \sqrt{8}$$

ج: $\frac{3}{2}$

$$9) \log_3 \frac{1}{\sqrt{(3)^6}}$$

ج: -3

$$10) \log_b \sqrt[7]{b}$$

ج: $\frac{1}{7}$

$$11) \log_7 \left(\frac{1}{\sqrt{343}} \right)^3$$

ج: $-\frac{1}{2}$

تحقق من فهمك

تمرين:

a) $\log_{32} \sqrt{32}$

ج: $\frac{1}{2}$

b) $\log_2 1$

ج: 0

c) $\log_2 \sqrt[3]{2^5}$

ج: $\frac{5}{3}$

d) $\log_7 \sqrt[5]{7}$

ج: $\frac{1}{5}$

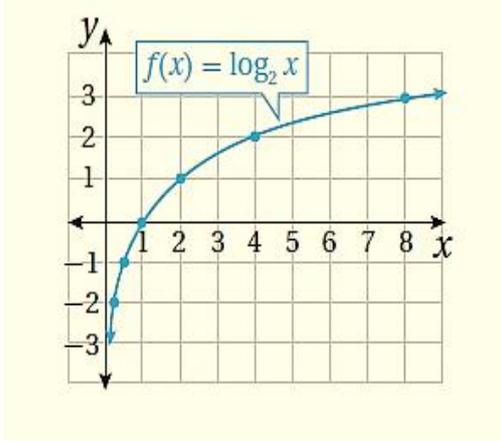
e) $8 \log_8 13$

ج: 13

f) $\log_6 6$

ج: 1

الخطوة الثانية: مثل النقاط على المستوى البياني
ثم جد خصائصه.



خصائص الاقتران:

- 1) مجال الاقتران هو الفترة: $(0, \infty)$.
- 2) مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- 3) مقطع الاقتران من محور X هو: 1.
- 4) لا يوجد مقطع للاقتران من محور؛
لأن دائماً $x > 0$
- 5) الاقتران له خط تقارب رأسي هو
المحور y .
- 6) الاقتران متزايد لأن الأسس $b > 1$.

تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانياً:

مثال 1: مثل الاقتران $f(x) = \log_2 x$
بيانياً، ثم حدد:

1. مجاله 2. مداه
3. مقطعيه من المحورين
4. خطوط التقارب 5. متزايد أم متناقص

الحل

الخطوة الأولى: أنشئ جدول القيم

عشان أطلع القيم بسهولة نكتب الاقتران على
الصورة الاسية

$$x = 2^y$$

انت تختار قيم y ونجد x عن طريق التعويض.

| | | | | | |
|-----------|-------------|-------------|-----------|----------|----------|
| $x = 2^y$ | $1/4$ | $1/2$ | 1 | 2 | 4 |
| y | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| (x, y) | $(1/4, -2)$ | $(1/2, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(2, 1)$ | $(4, 2)$ |

تمرين: مثل كل اقتران مما يلي بيانياً، ثم جد:

1. مجاله
 2. مداه
 3. مقطعيه من المحورين
 4. خطوط التقارب
 5. متزايد أم متناقص
- a. $f(x) = \log_3 x$

الحل

مثال 2: مثل الاقتران التالي بيانياً

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \text{ ثم جد:}$$

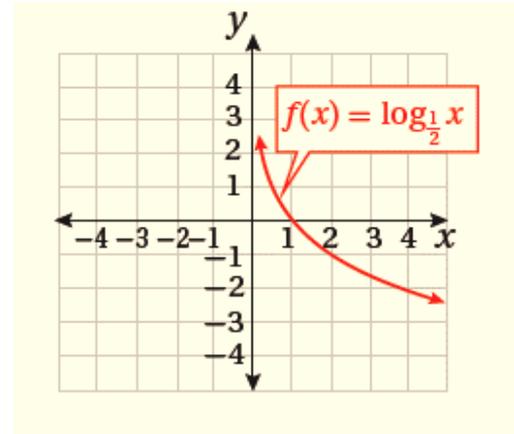
1. مجاله
2. مداه
3. مقطعيه من المحورين
4. خطوط التقارب
5. متزايد أم متناقص

الحل

الخطوة الأولى: أنشئ جدول القيم

| | | | | | |
|----------------------------------|----------|----------|--------|---------|---------|
| $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 |
| y | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
| (x, y) | (1/4, 2) | (1/2, 1) | (1, 0) | (2, -1) | (4, -2) |

الخطوة الثانية: مثل النقاط على المستوى البياني ثم جد خصائصه:



(1) مجال الاقتران هو الفترة: $(0, \infty)$.

(2) مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

(3) مقطع الاقتران من محور X هو: 1.

(4) لا يوجد مقطع للاقتران من محور y ؛ لأن $x > 0$ دائماً

(5) الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y .

(6) الاقتران متناقص لأن الأساس:

$$0 < b = \frac{1}{2} < 1$$

مجال الاقتران هو الفترة: $(0, \infty)$.
مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
مقطع الاقتران من محور X هو: 1.
لا يوجد مقطع للاقتران من محور y ؛ لأن دائماً $x > 0$
الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y .
الاقتران متزايد لأن الأساس $b > 1$

$$b. f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

الـحل

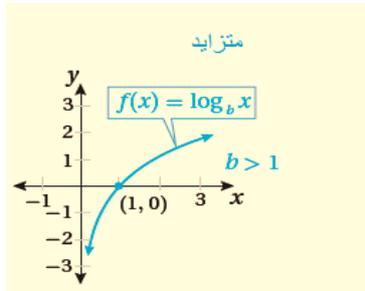
خصائص الاقتران اللوغاريتمي:

بالتأكيد لاحظت من الأمثلة السابقة أنّ
الاقتران اللوغاريتمي على صورة:

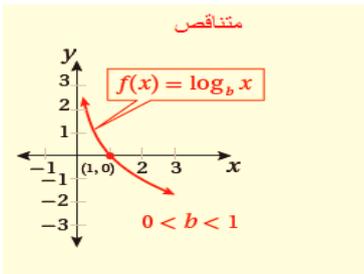
$$f(x) = \log_b x ; b \neq 1 ; b > 0$$

وتتمثل خصائصه فيما يلي:

1. مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي الفترة: $(0, \infty)$.
2. مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .
3. الاقتران يقطع المحور X في نقطة واحدة هي: $(1,0)$.
4. الاقتران لا يقطع المحور Y .
5. الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y .
6. الاقتران يكون متزايد إذا كان الأساس $b > 1$.



7. الاقتران يكون متناقص إذا كان الأساس $0 < b < 1$.



مجال الاقتران هو الفترة: $(0, \infty)$.

مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

مقطع الاقتران من محور X هو: 1.

لا يوجد مقطع للاقتران من محور y ؛ لأن دائماً $x > 0$

الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y .

الاقتران متناقص لأن الأساس:

$$0 < b = \frac{1}{2} < 1$$

مهارات عليا في المنحنيات

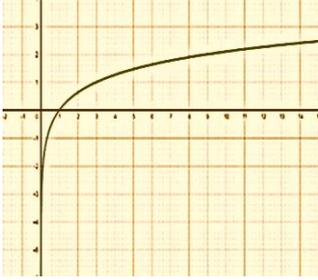
كون لعيب بالرسمات ☺

ممكن يتفلسف عليك بالمنحنيات ويعكس إشارة الاقتران.

احفظ الرسمات التالية على شكل قواعد ثابتة.

خليك لعيب ☺

$$4) f(x) = -\log_b x ; 0 < b < 1$$



متزايد

لأن اللوغاريتم سالب

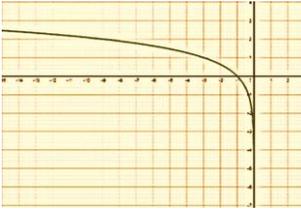
⇓

ينعكس حول محور x

$$\text{مثال: } f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$$

المجال: $(0, \infty)$

$$5) f(x) = \log_b -x ; b > 1$$



متناقص

لأن معامل x سالب

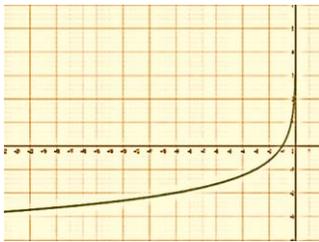
⇓

ينعكس حول محور y

$$\text{مثال: } f(x) = \log_3 -x$$

المجال: $(-\infty, 0)$

$$6) f(x) = \log_b -x ; 0 < b < 1$$



متزايد؛

لأن معامل x سالب

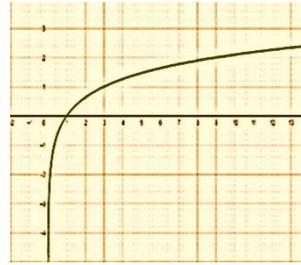
⇓

ينعكس حول محور y

$$\text{مثال: } f(x) = -\log_{1/3} x$$

المجال: $(-\infty, 0)$

$$1. f(x) = \log_b x ; b > 1$$



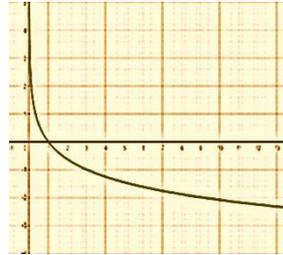
الوضع طبيعي

(متزايد)

$$\text{مثال: } f(x) = \log_3 x$$

المجال: $(0, \infty)$

$$2. f(x) = \log_b x ; 0 < b < 1$$



الوضع طبيعي

(متناقص)

$$\text{مثال: } f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

المجال: $(0, \infty)$

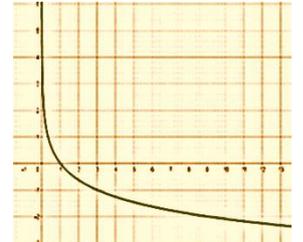
$$3. f(x) = -\log_b x ; b > 1$$

متناقص

لأن اللوغاريتم سالب

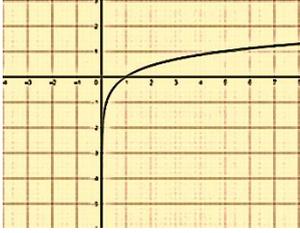
⇓

ينعكس حول محور x



$$\text{مثال: } f(x) = -\log_3 x$$

المجال: $(0, \infty)$



(3) الشكل التالي يمثل
منحنى الاقتران:

$$a) f(x) = \log_5 -x$$

$$b) f(x) = -\log_5 x$$

$$c) f(x) = -\log_{\frac{1}{5}} x$$

$$d) f(x) = \log_{\frac{1}{5}} -x$$

أفكار جميلة

(1) جد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران
 $f(x) = \log_a x$ يمر بالنقطة $(81, 4)$:

$$(81, 4) \xRightarrow{\text{يعني}} f(81) = 4$$

الحل

$$4 = \log_a 81 \Rightarrow a^4 = 81$$

$$a^4 = 3^4 \Rightarrow a = 3$$

(2) إذا علمت أن: $g(x) = 20 + \log_2(x+1)$
جد $\log_2(x+1)$ عند $g(63)$

الحل

$$g(63) = 20 + \log_2(64 + 1)$$

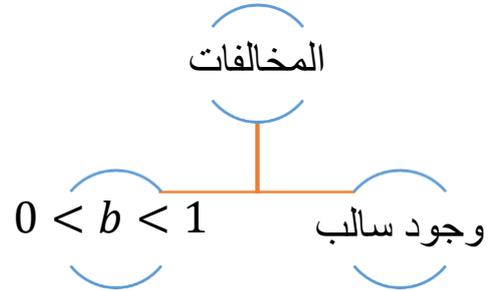
$$g(63) = 20 + \log_2(65)$$

$$g(63) = 20 + 6 = 26$$

(تمرين: 1) جد قيمة c التي تجعل الاقتران:
 $f(x) = \log_c x$ يمر بالنقطة $(16, 4)$.

$$ج: c = 2$$

طريقة المخالفات لمعرفة فيما إذا كان
الاقتران متزايد أم متناقص:



إذا وجدنا مخالفة واحدة ← متناقص

إذا وجدنا مخالفتين أو ولا مخالفة ← متزايد

مثال: ضع دائرة حول رمز الإجابة
الصحيحة.

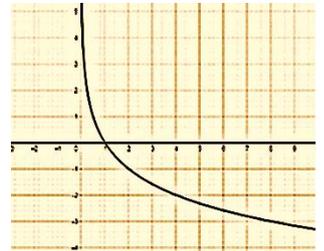
(1) واحد فقط من الاقترانات التالية تمثيله
البياني هو الشكل التالي:

$$a) f(x) = \log_2 x$$

$$b) f(x) = -\log_2 x$$

$$c) f(x) = \log_2 -x$$

$$d) f(x) = \log_{\frac{1}{2}} -x$$



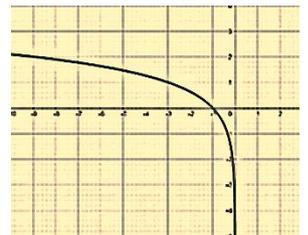
(2) الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران:

$$a) f(x) = \log_3 -x$$

$$b) f(x) = -\log_3 x$$

$$c) f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$$

$$d) f(x) = \log_{\frac{1}{3}} -x$$



مجالات الاقتران اللوغاريتمي:

مجالات الاقتران اللوغاريتمي الذي صورته:

مجالات الاقتران اللوغاريتمي الذي صورته: $f(x) = \log_b g(x)$ حيث: $b > 0 : b \neq 1$ هو:

جميع قيم x في مجال $g(x) > 0$

يعني ← ما داخل اللوغاريتم $0 <$

مثال: جد مجال الاقترانات اللوغاريتمية الآتية:

$$1) f(x) = \log_4(x + 3)$$

ما داخل اللوغاريتم $0 <$ $x + 3 > 0$

$x > -3$ نحل المتباينة

إذاً مجال الاقتران هو: $(-3, \infty)$

$$2) f(x) = \log_5(8 - 2x)$$

نطرح 8 من الطرفين $8 - 2x > 0$

القسمة على -2 $-2x > -8$

$$x < \frac{-8}{-2} = 4$$

عند القسمة على عدد سالب

تعكس إشارة المتباينة

إذاً مجال الاقتران هو: $(-\infty, 4)$

$$3) f(x) = -2 \log(-x + 2)$$

نطرح 2 من الطرفين $-x + 2 > 0$

نقسم على -1

ونعكس المتباينة

$$-x > -2 \rightarrow x < 2$$

إذاً مجال الاقتران هو: $(-\infty, 2)$

(2) جد قيمة m التي تجعل الاقتران

$f(x) = \log_m x$ يمر بالنقطة

$$\left(\frac{1}{27}, -3\right)$$



ج: $m = 3$

(3) إذا كان $f(x) = 20 + 3 \log_5(x + 1)$ جد قيمة $f(24)$.

ج: $f(24) = 26$

خط التقارب الرأسي للاقتران اللوغاريتمي:

لإيجاد خط التقارب الرأسي للاقتران:

$$f(x) = \log_b g(x)$$

اجعل ما داخل اللوغاريتم يساوي 0

$$g(x) = 0 \leftarrow x \text{ ثم جد قيمة } x$$

مثال: جد خط التقارب الرأسي للاقتران التالية:

$$1) f(x) = \log(x + 3)$$

الحل

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

خط التقارب الرأسي هو: $x = -3$

$$2) f(x) = \log(6 - 2x)$$

الحل

$$6 - 2x = 0$$

$$-2x = -6 \rightarrow x = 3$$

$$4) f(x) = 4 + 2 \log(-x)$$

نقسم على -1 ونعكس المتباينة

$$-x > 0$$

$$x < 0$$

إذاً مجال الاقتران هو: $(-\infty, 0)$

تمرين: جد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي:

$$1) f(x) = \log_7(5 - x)$$

ج: $(-\infty, 5)$

$$2) f(x) = \log_2(2x - 10)$$

ج: $(5, \infty)$

$$3) f(x) = \log_4(-x - 2)$$

ج: $(-\infty, -2)$

إذاً مجال الاقتران هو الفترات الموجبة:
 $(-\infty, -1)$ ، $(5, \infty)$.

$$2) f(x) = \log(x^2 - 2x - 8)$$

عشان أطلع الخطوط نجعل:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

ثم نحل ونجد قيم x

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = -2 , x = 4$$

لإيجاد المجال ندرس الإشارات ونختار الفترة الموجبة



إذاً مجال الاقتران هو الفترات الموجبة:

$$(4, \infty) , (-\infty, -2)$$

$$3) f(x) = \log(9 - x^2)$$

$$9 - x^2 = 0$$

$$(3 - x)(3 + x) = 0$$

$$x = 3 , x = -3$$



إذاً مجال الاقتران هو الفترة الموجبة:

$$(-3, 3)$$

تمرين: جد المجال وخط التقارب الرأسي
 للإقترانات الآتية:

$$1) f(x) = \log(-2 - 2x)$$

ج: المجال: $(-\infty, -1)$

خط التقارب: $x = -1$

$$2) f(x) = 3 \log(4 + 2x)$$

ج: المجال: $(-2, \infty)$

خط التقارب: $x = -2$

أمثلة فتاكة: جد مجال وخط (خطوط)
 التقارب الرأسي للإقترانات التالية:

$$1) f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

في الاقتران النسبي عشان
 أطلع خطوط التقارب
 الرأسي، نسوي البسط
 بالصفر والمقام بالصفر
 ونجد قيم x .

إذاً خطوط التقارب:

$$x = -1 ; x = 5$$

عشان أطلع المجال: لازم يكون ما داخل اللوغاريتم $0 <$

$$\frac{x+1}{x-5} > 0$$

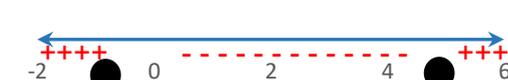
ندرس الإشارات:



إشارة البسط ←



إشارة المقام ←



إشارة $\frac{x+1}{x-5}$

كن مبتهجاً حتى العاشرة صباحاً وسيتكفل بقية اليوم بنفسه

أسئلة الكتاب:

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية:

$$1) \log_7 343 = 3$$

$$2) \text{Log}_4 256 = 4$$

$$3) \log_{125} 5 = \frac{1}{3}$$

$$4) \log_{36} 6 = 0.5$$

$$5) \text{Log}_9 1 = 0$$

$$6) \text{Log}_{57} 57 = 1$$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية:

$$7) 2^6 = 64$$

$$8) 4^{-3} = \frac{1}{64}$$

$$9) 6^3 = 216$$

تمرين: جد مجال وخط (خطوط) التقارب الرأسي للاقتربات التالية:

$$1) f(x) = \log_3 \left(\frac{3-x}{x-4} \right)$$

ج: المجال: (3, 4)

خطوط التقارب: $x = -2$. $x = 3$

$$2) g(x) = \log_3(x^2 - x - 6)$$

ج: المجال: $(-\infty, -2)$. $(3, \infty)$

خطوط التقارب: $x = -2$. $x = 3$

$$3) f(x) = \log_3(4x - 2x^2)$$

ج: المجال: (0, 2)

خطوط التقارب: $x = 0$. $x = 2$

20) $10^{\log_{10} \frac{1}{8}}$

21) $\text{Log}_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^7}}$

22) $\log_a \sqrt[5]{a}$

21) $\log_{10}(1 * 10^{-9})$

24) $8^{\log_8 5}$

مثّل كل اقتران مما يأتي بيانياً، ثم حدّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الاحداثيين وخطوط تقاربه، مبيناً إذا كان متناقصاً أم متزايداً:

25) $f(x) = \log_5 x$

26) $g(x) = \log_4 x$

27) $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

28) $r(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

29) $\text{Log}_{10} x$

30) $g(x) = \log_6 x$

جد مجال كل اقتران لو غاريتمي مما يأتي:

31) $f(x) = \log_3(x - 2)$

32) $f(x) = 5 - 2 \log_7(x + 1)$

33) $f(x) = -3 \log_4(-x)$

10) $5^{-3} = 0.008$

11) $5^1 = 51$

12) $9^0 = 1$

جد قيمة كل مما يأتي دون استخدام الآلة الحاسبة:

13) $\log_3 81$

14) $\log_{25} 5$

15) $\log_4 32$

16) $\log_{49} 343$

17) $\log_{10} 0.001$

18) $\log_{\frac{3}{2}} 1$

19) $\log_{\frac{1}{4}} 4$

مهارات التفكير العليا:

تبرير: اكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، مبرراً إجابتي.

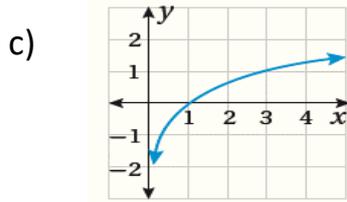
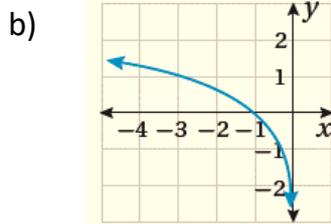
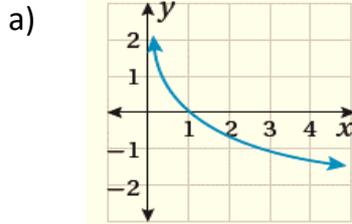
38) $f(x) = \log_3(x)$

39) $f(x) = \log_3(-x)$

40) $f(x) = -\log_3 x$

طبعاً شرحناهم

انت لغيّب رسومات ☺



تحدي: جد مجال كل اقتران

لو غاريتي مما يأتي محدداً خطوط تقاربه الرأسي.

41) $f(x) = \log_3(x^2)$

42) $f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$

43) $f(x) = \log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$

34. جد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_a x$ يمر بالنقطة: (5, 32)

35. جد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_c x$ يمر بالنقطة: $(-\frac{1}{4}, -4)$

إعلانات: يمثّل الاقتران: $f(x) = 10 +$

$20 \log_5(a + 1)$ مبيعات شرطة (بالآلاف الدنانير) من منتج جديد، حيث تمثّل a المبلغ الذي تنفقه الشركة على إعلانات المنتج.



وتعني القيمة

$$p(1) = 19$$

انفاق 100 JD

على الإعلانات

يحقق إيرادات قيمتها 9000 JD من بيع المنتج.

36. جد قيمة كل من:

$$p(124); p(24); p(4)$$

37. فسّر معنى هذه القيم في فرع 36.

اكتشف الخطأ:

44. كتبت مُنى المعادلة الأسية: $y^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي:

$$\log_4(-3) = \frac{1}{64} \quad \times$$

اكتشف الخطأ ثم صححه!

3) $\log_a \frac{1}{9}$

قانون القسمة

$$\log_a \frac{1}{9} = \log_a 1 - \log_a 9$$

قاعدة: $\log_a 1 = 0$

$$= 0 - \log_a 3^2$$

$$= -2 \log_a 3$$

نعوض

$$= -2 * 1.59 = 0.73$$

4) $\log_a 125$

$$\log_a 125 = \log_a 5^3$$

قانون القاعدة

$$= 3 \log_a 5$$

$$= 3 * 2.32 = 6.96$$

نعوض

مثال 2: إذا كان $\log_a 7 = 0.936$ وكان $\log_a 3 = 0.538$ فأجد كلاً مما يأتي:

1) $\log_a \frac{3}{7}$

$$\log_a \frac{3}{7} = \log_a 3 - \log_a 7$$

$$= 0.538 - 0.936 = -0.408$$

2) $\log_a 21$

$$\log_a 21 = \log_a 3 * 7$$

$$= \log_a 3 + \log_a 7$$

$$= 0.538 + 0.936 = 1.464$$

إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة، وكان p عدداً حقيقياً حيث $b \neq 1$ فإن:

✓ قانون الضرب:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

✓ قانون القسمة:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

✓ قانون القوة:

$$\log_b x^p = p \log_b x$$

مثال 1: إذا كان $\log_a 3 = 1.59$ وكان $\log_a 5 = 2.32$ أجد كلاً مما يلي:

1) $\log_a 15$

$$\log_a 15 = \log_a 3 * 5$$

قانون الضرب

$$= \log_a 3 + \log_a 5$$

نعوض

$$= 1.59 + 2.32 = 3.9$$

2) $\log_a \frac{3}{5}$

$$\log_a \frac{3}{5} = \log_a 3 - \log_a 5$$

$$= 1.59 - 2.23 = -0.73$$

5) $\log_a 441$

$$\begin{aligned}\log_a 441 &= \log_a(7 * 7 * 3 * 3) \\ &= \log_a(7^2 * 3^2) \\ &= \log_a(7^2) + \log_a(3^2) \\ &= 2 \log_a 7 + 2 \log_a 3 \\ &= 2 * 0.936 + 2 * 0.528 \\ &= 1.872 + 1.056 = 2.928\end{aligned}$$

$$0.4 * 0.2 = 0.08$$

3) $\log_a \sqrt[5]{2}$

$$\begin{aligned}\log_a \sqrt[5]{2} &= \log_a 2^{\frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{5} \log_a 2 \\ &= \frac{1}{5} * 0.4 = \frac{0.4}{5}\end{aligned}$$

رگز:
 $\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}$

4) $\log_a 20$

$$\begin{aligned}\log_a 20 &= \log_a(2 * 2 * 5) \\ \log_a 2 + \log_a 2 + \log_a 5 \\ 0.4 + 0.4 + 0.2 &= 1\end{aligned}$$

مثال 4: إذا علمت أن $\log_b 2 = 0.3$ وكان $\log_b 3 = 0.1$ جد قيمة $\log_b 54$

$$\begin{aligned}\log_b 54 &= \log_b(2 * 27) \\ &= \log_b(2) + \log_b(27) \\ &= 0.3 + \log_b(3^3) \\ &= 0.3 + 3 \log_b 3 \\ &= 0.3 + 3 * 0.1 = 0.6\end{aligned}$$

$27 = 3^3$

3) $\frac{\log_a 3}{\log_a 7}$

$$\frac{\log_a 3}{\log_a 7} = \frac{0.528}{0.936} = 0.564$$

4) $\log_a \frac{1}{7}$

$$\begin{aligned}\log_a \frac{1}{7} &= \log_a 1 - \log_a 7 \\ &= 0 - 0.936 \\ &= -0.936\end{aligned}$$

6) $\log_a \frac{49}{27}$

$$\begin{aligned}\log_a \frac{49}{27} &= \log_a 49 - \log_a 27 \\ &= \log_a 7^2 - \log_a 3^3 \\ &= 2 \log_a 7 - 3 \log_a 3 \\ &= 2 * 0.936 - 3 * 0.528 \\ &= 1.872 - 1.584 = 0.288\end{aligned}$$

7) $\log_a(7a^2)$

$$\begin{aligned}\log_a 7a^2 &= \log_a 7 + \log_a a^2 \\ &= 0.936 + 2 \log_a a \\ &= 0.936 + 2 = 2.936\end{aligned}$$

مثال 3: إذا علمت أن $\log_a 2 = 0.4$ وأن $\log_a 5 = 0.2$ جد كل مما يلي:

1) $\log_a \sqrt[4]{16}$

$2 = \sqrt[4]{16}$

$$\log_a \sqrt[4]{16} = \log_a 2 = 0.4$$

2) $(\log_a 2)(\log_a 5)$

مثال 5: أثبت أن: $\frac{\log_a 343}{\log_a 49} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{\log_a 343}{\log_a 49} &= \frac{\log_a 7^3}{\log_a 7^2} \\ &= \frac{3 \log_a 7}{2 \log_a 7} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

تمرين: أثبت أن $\frac{\log_a 792}{\log_a 27} = 2$

ورجيني شطارتك

3. إذا علمت أن $\log_b a = 0.3$ جد قيمة $\log_b \left(\frac{b}{a^2}\right)$

ج: 0.4

4. أثبت أن $\log_a \left(\frac{a^2}{\sqrt{a}}\right) = \frac{3}{2}$

ج: 0.4

تمارين الفخامة **تحقق من فهمك:**

1. إذا كان $\log_b 7 = 1.2$ وكان $\log_b 2 = 0.4$ جد كل من:

a) $\log_b 14$

ج: 1.6

b) $\log_b \frac{2}{7}$

ج: 0.8

c) $\log_b 32$

ج: 2

d) $\log_b \frac{1}{49}$

ج: -2.4

2. إذا علمت أن $\log_a 5 = 0.2$ جد قيمة: $\log_a (25a^3)$

ج: 3.4

$$4) \log_a \sqrt{x}$$

$$\log_a x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a x$$

$$5) \log_a \frac{\sqrt{xy}}{z}$$

$$\begin{aligned} & \log_a (xy)^{\frac{1}{2}} - \log_a z \\ &= \frac{1}{2} \log_a (xy) - \log_a z \end{aligned}$$

$$6) \log_a \sqrt{\frac{x^2 y^3}{z^3}}$$

$$\begin{aligned} &= \log_a \left(\frac{x^2 y^3}{z^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\log_a x^2 + \log_a y^3 - \log_a z^3) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} (2 \log_a x + 3 \log_a y - 3 \log_a z)$$

$$7) \log_a \left(\frac{(x^{-1} y^2)^4}{(x^5 y^{-2})^3} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \log_a (x^{-1} y^2)^4 - \log_a (x^5 y^{-2})^3 \\ &= 4 \log_a x^{-1} y^2 - 3 \log_a x^5 y^{-2} \end{aligned}$$

$$4(-1 \log_a x + 2 \log_a y) - 3(5 \log_a x - 2 \log_a y)$$

تمرين: تحقق من فهمك

اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة علمًا بأن المتغيرات تمثل أعدادًا حقيقية موجبة:

$$1) \log_a a^2 b^9$$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المطولة:

سنقوم بكتابة مقدار لوغاريتمي بصورة تحتوي مقادير لوغاريتمية عديدة باستعمال قوانين اللوغاريتمات:

مثال: اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة علمًا بأن المتغيرات جميعها أعداد حقيقية موجبة:

$$1) \log_5 (x^7 y^2)$$

$$\begin{aligned} \log_5 (x^7 y^2) &= \log_5 x^7 + \log_5 y^2 \\ &= 7 \log_5 x + 2 \log_5 y \end{aligned}$$

$$2) \log_4 \frac{xy^2}{z^3}$$

$$\begin{aligned} \log_4 \frac{xy^2}{z^3} &= \log_4 xy^2 - \log_4 z^3 \\ &= \log_4 x + \log_4 y^2 - \log_4 z^3 \\ &= \log_4 x + 2 \log_4 y - 3 \log_4 z \end{aligned}$$

$$3) \log_a \sqrt{\frac{x^2 y^3}{a^5}}$$

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{x^2 y^3}{a^5} \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2 y^3}{a^5} \\ &= \frac{1}{2} (\log_a x^2 + \log_a y^3 - \log_a a^5) \\ &= \frac{1}{2} (2 \log_a x + 3 \log_a y - 5 \log_a a) \\ &= \log_a x + \frac{3}{2} \log_a y - \frac{5}{2} \log_a a \end{aligned}$$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة
المختصرة:

مثال: اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة، علمًا بأن المتغيرات أعداد حقيقية موجبة:

$$\begin{aligned} 1) 3 \log_2 x + 4 \log_2 y \\ &= \log_2 x^3 + \log_2 y^4 \\ &= \log_2 x^3 y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) 5 \log_a x + \frac{1}{3} \log_a y - 7 \log_a z \\ &= \log_a x^5 + \log_a y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7 \\ &= \log_a x^5 y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7 \\ &= \log_a \frac{x^5 y^{\frac{1}{3}}}{z^7} \\ &= \log_a \frac{x^5 \sqrt[3]{y}}{z^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) 3 \log_a x - 2 \log_a y \\ &= \log_b (b-1) + \log_b b^2 \\ &= \log_b (b-1) b^2 \\ &= \log_b (b^3 - b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \log_b (b-1) + 2 \log_b b \\ &= \log_b (b-1) + \log_b b^2 \\ &= \log_b (b-1) b^2 \\ &= \log_b (b^3 - b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \log_a (\sqrt{x}) - \log_a \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \log_a (\sqrt{x}) - \log_a \sqrt{x}^{-1} \\ &= \log_a (\sqrt{x}) + \log_a (\sqrt{x}) \\ &= \log_a (\sqrt{x} \sqrt{x}) = \log_a x \end{aligned}$$

$$2) \log_3 \frac{(x+1)^3}{8}$$

$$3) \log_3 \frac{x^7 y^3}{z^3}$$

$$4) \text{Log}_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$$

من الحياة: أمثلة واقعية

1) في تجربة لتحديد مدى تأثير المدة الزمنية في درجة تذكّر الطلبة للمعلومات، تقدمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادة معينة، ثم لاختبارات مكافئة لهذا الاختبار على مدار عدّة أشهر بعد ذلك، فوجد الباحثون أن النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها أحد الطلبة بعد t أشهر من إنهائه دراسة المادة تعطى بالاقتران:

$$M(t) = 85 - 25 \log_{10}(t + 1)$$

جد النسبة المئوية للمادة التي يتذكرها هذا الطالب بعد 19 شهراً من إنهائه دراستها علماً أن $\log_{10} 2 = 0.3101$ تقريباً؟

نعوض مكان $t = 19$

الحل

$$M(t) = 85 - 25 \log_{10}(t + 1)$$

$$M(19) = 85 - 25 \log_{10}(19 + 1)$$

$$M(19) = 85 - 25 \log_{10}(20)$$

$$M(19) = 85 - 25 \log_{10}(10 * 2)$$

$$M(19) = 85 - 25 (\log_{10}(10) - \log_{10}(2))$$

$$M(19) = 85 - 25 (1 + 0.3010) = 52$$

إذا النسبة المئوية التي يتذكرها هذا الطالب بعد 19 شهراً هي 52%

$$6) \log_a(x^2 - 25) - \log_a(x + 5)$$

$$\begin{aligned} \log_a \frac{x^2 - 25}{(x + 5)} &= \\ \log_a \frac{(x + 5)(x - 5)}{x + 5} &= \\ \log_a(x - 5) & \end{aligned}$$

$$7) 3 \log_a 1 - \log_b b$$

$$\begin{aligned} &= \log_a 1^3 - \log_b b \\ &= \log_a 1 - \log_b b \\ &= 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$8) 8 \log_b x + 4 \log_b y - \frac{1}{2} \log_b z$$

$$\begin{aligned} &= \log_b x^8 + \log_b y^4 - \log_b z^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_b \frac{x^8 y^4}{z^{\frac{1}{2}}} \\ &= \log_b \frac{x^8 y^4}{\sqrt{z}} \end{aligned}$$

تمرين: اكتب بالصورة المختصرة علماً بأن المتغيرات إعداد حقيقيّة:

$$1) \log_5 a + 3 \log_5 b$$

$$2) 5 \log_b x + \frac{1}{2} \log_b y - 9 \log_b z$$

أسئلة الكتاب:

$$\log_a 6 = 0.778 \quad \text{إذا كان}$$

$$\log_a 5 = 0.699 \quad \text{جد كلا مما يأتي:}$$

$$1) \log_a \frac{5}{6} \quad 2) \log_a 30$$

$$3) \frac{\log_a 5}{\log_a 6} \quad 4) \log_a \frac{1}{6}$$

$$5) \log_a 900 \quad 6) \log_a \frac{18}{15}$$

$$7) \log_a (6a^2) \quad 8) \log_a \sqrt[4]{25}$$

$$9) (\log_a 5)(\log_a 6)$$

اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي
بالصورة المطولة، علمًا بأن المتغيرات
جميعها أعداد حقيقية موجبة:

$$10) \log_a x^2$$

$$11) \log_a \frac{a}{bc}$$

$$12) \log_a (\sqrt{x}\sqrt{y})$$

$$13) \log_a \frac{\sqrt{2}}{y}$$

$$14) \log_a \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$15) \log_a \sqrt[5]{32 x^5}$$

$$16) \log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3}$$

$$17) \log_a \sqrt{\frac{x^{12} y}{y^3 z^4}}$$

(2) إيرادات: يمثل الاقتران $T(a) = 10 + 20 \log_6(a + 1)$ مبيعات شركة (بالآف الدينار) من منتج جديد، حيث a هو المبلغ الذي تنفقه الشركة على إعلانات المنتج، $a \geq 0$ وتعني القيمة $T(1) \approx 17.7$ أن انفاق 1000JD على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها 17700JD من بيع المنتج، جد قيمة إيرادات الشركة بعد انفاقها مبلغ 11 ألف دينار على الإعلانات علمًا بأن $\log_6 2 = 0.3869$

نعوض في المعادلة $a = 11$

الحل

$$\begin{aligned} T(11) &= 10 + 20 \log_6(11 + 1) \\ &= 10 + 20 \log_6(12) \\ &= 10 + 20 \log_6(6 * 2) \\ &= 10 + 20(\log_6(6) + \log_6 2) \\ &= 10 + 20(1 + 0.3869) \\ &= 10 + 20(1.3869) \\ &\approx 37.738 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

تمرين: يمثل الاقتران $M(t) = 92 - 28 \log_{10}(t + 1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها الطالب من مادة معينة بعد t شهر من انتهائه دراستها. جد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها الطالب بعد 29 شهر من إنهائه دراسة المادة. علمًا بأن $\log_{10} 3 = 0.4771$

$$\text{الجواب: } 92 - 1.4771 = 90.5$$

(28) تبرير: أثبت أن:

$$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9) = 1$$

حيث $b > 3$ مبرراً الإجابة.

اكتب ما يلي بالصورة المختصرة:

19) $\log_a x + \log_a y$

20) $\log_b(x+y) - \log_b(x-y)$ $x > y$

21) $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}}$

22) $\log_a(x^2-4) - \log_a(x+2)$

23) $2 \log_b x - 3 \log_b y + \frac{1}{3} \log_b z$

24) $\log_b 1 + 2 \log_b b$

(25) يمثل الاقتران: $f(x) = 29 + 98.9 \log_6(x+2)$ النسبة المئوية لطول طفل ذكر الآن ضد طوله عند البلوغ حيث x عمره بالسنوات. جد النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ علماً بأن $\log_6 2 = 0.3869$

مهارات تفكير عليا:

(26) تحدّ: أثبت أن: $\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{3}{1}$

مش علينا

(27) اكتشف الخطأ ثم صححه:

$$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$$

X

تغيير الأساس

يستخدم تغيير الأساس في الآلات الحاسبة يلي ما فيها غير الأساس الاعتيادي او الطبيعي، باستخدام القاعدة:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

أمثلة: (الحل بالآلة الحاسبة)

$$1) \log_3 16$$

$$= \frac{\log 16}{\log 3} = 2.52$$

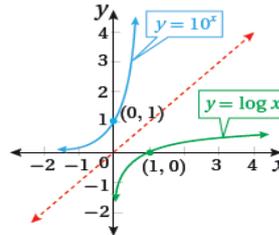
$$2) \log_{\frac{1}{2}} 10$$

$$= \frac{\log 10}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log 10}{\log 1 - \log 2}$$

$$= \frac{1}{-\log 2} = -3.32$$

اللوغاريتم الاعتيادي

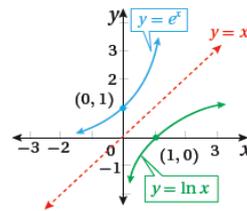
يطلق على اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log 10$ اسم اللوغاريتم الاعتيادي ويكتب عادة من دون أساس.



يعتبر اقتران اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log x$ هو الاقتران العكسي للاقتران الأسّي: $y = 10^x$

اللوغاريتم الطبيعي

يطلق على اللوغاريتم للأساس e أو \log_e اسم "اللوغاريتم الطبيعي" ويرمز له بالرمز \ln



ويعتبر اقتران اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ هو الاقتران العكسي للاقتران الأسّي الطبيعي $y = e^x$

$\ln e^x = x$ و $e^{\ln x} = x$ يعني $e^y = x \xrightarrow{\text{إذا فقط إذا}} y = \ln x$

استعمال الآلة الحاسبة فقط:

للمعرفة فقط

$$1) \log 2.7 = 0.4313637642$$

$$2) \ln 17 = 2.833213344$$

المعادلة الأسية

هي معادلة تتضمن قوى أسسها متغيرات ويتطلب حلها كتابة طرفي المعادلة في صورة قوتين للأساس نفسه حسب القاعدة:

$$x = y \xleftarrow{\text{فإن}} a^x = a^y$$

$$\text{حيث } a > 0 \text{ و } a \neq 0$$

مثال: حل المعادلة: $2^{4x} = 16$

$$2^{4x} = 2^4$$

$$4x = 4 \rightarrow x = 1$$

لكن؛ في بعض المعادلات الأسية ما بنقدر نكتب طرفي المعادلة في صورة قوتين لنفس الأساس مشان هيك بنستعمل:

خاصية المساواة اللوغاريتمية:

إذا كان $b > 0$ حيث: $x > 0$ و $y > 0$ فإن:

$$x = y \xleftarrow{\text{إذا فقط إذا}} \log_b x = \log_b y$$

مثال: حل المعادلات الآتية:

$$1) 2^x = 13$$

الحل

نأخذ Log للطرفين (اللوغاريتم الاعتيادي)

$$\log 2^x = \log 13$$

$$x \log 2 = \log 13 \rightarrow x = \frac{\log 13}{\log 2} = 3.7$$

$$2) 3^x = 5$$

الحل

نأخذ Log للطرفين (اللوغاريتم الاعتيادي)

$$\log 3^x = \log 5$$

$$x \log 3 = \log 5$$

$$x = \frac{\log 5}{\log 3} = \log_3 5$$

يمكن حل السؤال بأخذ \log_3 للطرفين

$$\log_3 3^x = \log_3 5 \rightarrow x = \log_3 5$$

$$3) 5e^{3x} = 125$$

الحل

$$e^{3x} = 25$$

نقسم الطرفين على 5

$$\ln e^{3x} = \ln 25$$

نأخذ Ln للطرفين

$$3x = \frac{\ln 25}{3}$$

نقسم على معامل X

$$x = 1.07$$

$$6) 49^x + 7^x - 72 = 0$$

$$49^x = 7^{2x} = (7^2)^x$$

$$(7^2)^x + 7^x - 72 = 0$$

$$u^2 + u - 72 = 0$$

$$(u + 9)(u - 8) = 0$$

$$u = -9$$

هذا مستحيل لأن 7^x موجبة دائماً

$$u = 8 \rightarrow 7^x = 8$$

$$\log 7^x = \log 8$$

$$x \log 7 = \log 8$$

$$x = \frac{\log 8}{\log 7} = \log_7 8$$

أو

$$4) 2^{x+4} = 5^{3x}$$

الحل

$$\log 2^{x+4} = \log 5^{3x}$$

$$(x + 4) \log 2 = 3x \log 5$$

$$x \log 2 + 4 \log 2 = 3x \log 5$$

$$x \log 2 - 3x \log 5 = 4 \log 2$$

$$x(\log 2 - 3 \log 5) = 4 \log 2$$

$$x = \frac{4 \log 2}{(\log 2 - 3 \log 5)} = 0.67$$

قانون القوة

نوزع

X عامل مشترك

نقسم على

معامل، X

$$5) 9^x + 3^x - 30 = 0$$

الحل

$$9^x = 3^{2x} = (3^x)^2$$

افرض أن $3^x = u$

$$(3^x)^2 + 3^x - 30 = 0$$

$$u^2 + u - 30 = 0$$

نحل

$$(u + 6)(u - 5) = 0$$

$$u = -6 \text{ or } u = 5$$

$$u = -6 \rightarrow 3^x = -6$$

مستحيل لأن 3^x موجبة دائماً

أو

$$u = 5 \rightarrow 3^x = 5$$

$$\log 3^x = \log 5$$

$$x \log 3 = \log 5$$

$$x = \frac{\log 5}{\log 3} = \log_3 5$$

$$7) -3e^{4x+1} = -96$$

الحل

$$e^{4x+1} = 32$$

نقسم على -3

$$\ln e^{4x+1} = \ln 32$$

نأخذ Ln للطرفين

$$4x + 1 = \ln 32$$

نطرح 1

$$4x = \ln 32 - 1$$

$$x = \frac{\ln 32 - 1}{4}$$

ليس المهم أن تتقدم بسرعة بل المهم أن تتقدم في المكان الصحيح

d) $4^x + 2^x - 12 = 0$

ج: $x = 2$

e) $25^x - 5^x = 0$

ج: $x = 0$

f) $3^x + \frac{2}{3^x} = 3$

ج: $x = 0 ; x = \log_3 2$

8) $16^x - 4^x = 0$

$16^x = (4^x)^2 \rightarrow (4^x)^2 - 4^x = 0$

$u^2 - u = 0 \rightarrow u(u - 1) = 0$

مستحيل $\rightarrow 4^x \rightarrow u = 0$

أو

$u = 4 \rightarrow x = 1$

تمرين: تحقق من فهمك

حل المعادلات الأسية الآتية مقرباً إجابتك إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $7^x = 9$

ج: $x = \log_7 9$

b) $2e^{5x} = 64$

ج: $x = \frac{\ln 32}{5}$

c) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

ج: $\frac{-4 \log 2 - \log 7}{2 \log 7 - \log 2}$

ليس المهم أن تتقدم بسرعة بل المهم أن تتقدم في المكان الصحيح

أمثلة من الحياة

1) نمو سكاني: قدر عدد سكان العالم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م ويمثل الاقتران: $p(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكان العالم (بالمليار نسمة) بعد t عام منذ سنة 2006م. بعد كم سنة يصبح منذ عام 2006 يصبح عدد سكان العالم 13 مليار نسمة؟

الحل

$$p(t) = 13 = 6.5(1.014)^t$$

$$2 = (1.014)^t$$

$$\ln 2 = \ln(1.014)^t$$

$$\ln 2 = t \ln(1.014)$$

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1.014)} \approx 50$$

2) أودع سمير مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 5% بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي؟

الحل

تذكر قانون حملة المبلغ للربح المركب المستمر: $A = P e^{rt}$

$$A = P e^{rt}$$

$$2A = P e^{0.05t}$$

$$2 = e^{0.05t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{0.05t}$$

$$0.05t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.05}$$

جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي يعني: $A = 2P$ نعوض في القانون

تمرين: أسماك: يمثل الاقتران

$p(t) = 200e^t$ عدد أسماك السلمون p في نهر بعد t سنة من بدء دراسة معينة:

(a) جد عدد أسماك السلمون عند بدء الدراسة؟

(b) بعد كم سنة يصبح عدد أسماك السلمون 4000 سمكة؟

ج :
a) 200
b) $\ln 20$

لكي تتنجح يجب على رغبتك في النجاح أن تتغلب على خوفك من الفشل

كوالا: تناقصت أعداد حيوان الكوالا في

إحدى الغابات وفق الاقتران

$$N = 873 e^{-0.078t}$$

حيث: N العدد المتبقي بعد t سنة.

بعد كم سنة يصبح في الغابة 97 حيوان من الكوالا؟



أُتدرب وأحل المسائل:

أسئلة مختارة

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً للإجابة لأقرب جزء من عشرة:

1) $\log 19$

2) $\log(2.5 * 10^{-3})$

$3\log_3 e^2$

4) $\log_7 \frac{1}{7}$

5) $\log 1000$

حل المعادلات الأسية الآتية:

1) $6^x = 121$

2) $-3e^{4x} = -2$

3) $5^{7x-2} = 3^{2x}$

4) $-5^x - 42 = 0$

5) $29^x = 32$

6) $27^{2x+3} = 2^{x-5}$

أودعت سميرة مبلغ p في حساب بنكي،
بنسبة ربح مركب مستمر مقداره 5%

(a) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ مثلي
المبلغ الأصلي؟

(b) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ 3 أمثال
المبلغ الأصلي؟

مهارات عليا

(1) جد قيمة كل من h ; k إذا وقعت النقطة $(-2; k)$ والنقطة $(h; 100)$ على منحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x+3}$

(2) تحدّد: حل المعادلة الآتية

$$3^x + \frac{4}{3^x} = 5$$

(3) توصلت دراسة إلى أن عدد الأرناب في محمية طبيعية يتزايد وفق الاقتران:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0.05t}}$$

حيث N عدد الأرناب بعد t سنة:

(a) جد عدد الأرناب عند بدء الدراسة؟

(b) بعد كم سنة يصبح عددها 700 أرناب؟